模拟赛

我们用 (x_1,y_1,x_2,y_2) 表示一个包含所有 $x_1 \le i \le x_2, y_1 \le j \le y_2$ 的格子 (i,j) 矩形。

设 a_i 的最小值为 X_{min}，a_i 的最大值为 X_{max}，b_i 最小值为 Y_{min}，b_i 最大值为 Y_{max}。

考虑对每种第一个矩形，统计能覆盖所有给定格子的第二个矩形的方案数。

假设第一个矩形是 (l_x,l_y,r_x,r_y)，第二个矩形是 (s_x,s_y,t_x,t_y)。假如确定了 (l_x,l_y,r_x,r_y)，我们可以在之后特别考虑所有给定的格子都被第一个矩形包含了的情况，假设至少一个给定的格子未被第一个矩形包含，设 (u_x,u_y,v_x,v_y) 是包含所有未被第一个矩形包含的给定的格子的最小矩形。那么满足条件的第二个矩形的数量是 $u_x u_y (A - v_x + 1)(B - v_y + 1)$，四个数乘在一起比较难处理。如果 $l_x > X_{min}$ 或 $r_x < X_{max}$，u_x 或 v_x 就会有一个被确定了。同理若 $l_y > Y_{min}$ 或 $r_y < Y_{max}$，u_y 和 v_y 中就有一个确定了。这样大部分比较复杂的情况都可以被转化为只需考虑不超过两个数乘起来的问题。考虑讨论矩形 (l_x,l_y,r_x,r_y) 与 $(X_{min},Y_{min},X_{max},Y_{max})$ 的边界的关系。

3.1 (l_x,l_y,r_x,r_y) 与 $(X_{min},Y_{min},X_{max},Y_{max})$ 交为空

此时第二个矩形必须包含所有给定的格子。

我们只需计算与 $(X_{min},Y_{min},X_{max},Y_{max})$ 交为空的矩形的数量，即满足 $[l_x,r_x] \cap [X_{min},X_{max}] = \varnothing$ 或 $[l_y,r_y] \cap [Y_{min},Y_{max}] = \varnothing$ 的 (l_x,l_y,r_x,r_y) 的数量。对这两个条件容斥一下即可。

3.2 (l_x,l_y,r_x,r_y) 与 $(X_{min},Y_{min},X_{max},Y_{max})$ 交不为空

下面我们对 (l_x,l_y,r_x,r_y) 与 $(X_{min},Y_{min},X_{max},Y_{max})$ 的交的各个边界与 $(X_{min},Y_{min},X_{max},Y_{max})$ 的各个边界是否相邻作讨论。在草稿纸上讨论一下不难发现，共有 6 种本质不同的情况，下面对每种情况取一个代表来讲做法。

外部的框代表矩形 $(X_{min},Y_{min},X_{max},Y_{max})$，灰色的矩形是选取的第一个矩形与 $(X_{min},Y_{min},X_{max},Y_{max})$ 的交。

在下面，我们只对第一个矩形是 $(X_{min},Y_{min},X_{max},Y_{max})$ 的子矩形的情况统计答案。在哪些边界与 $(X_{min},Y_{min},X_{max},Y_{max})$ 的边界相邻确定之后，乘以一个数即可得到 (第一个矩形可以不是 $(X_{min},Y_{min},X_{max},Y_{max})$ 子矩形的) 答案。

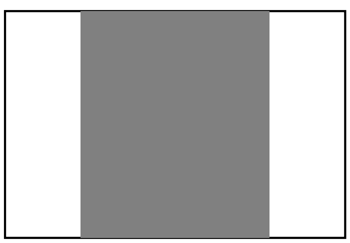
3.2.1 情况 1

这种情况下第二个矩形可以任取，第一个矩形的数量也是显然的。

3.2.2 情况 2

从左到右枚举右边界统计答案，总共只有不超过 B 种，暴力枚举即可。

3.2.3 情况 3



这种情况下 $u_y = Y_{min}, v_y = Y_{max}$，我们只需统计 $u_x(A - v_x + 1)$ 的和即可。也就是说我们只关注没有被第一个矩形包含的给定的点的 a_i 最小值和最大值。

设 $b_i \le Y_{min} + k$ 的所有 (a_i, b_i) 中，a_i 的最小值为 p_k，最大值为 q_k；$b_i \ge Y_{max} - k$ 的所有 (a_i, b_i) 中，a_i 最小值为 d_k，最大值为 e_k。

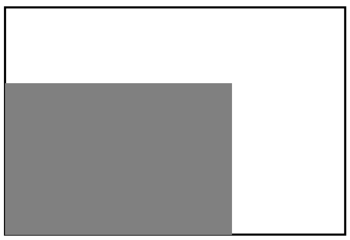
我们要求的是

$$\sum_{k_1=0}^{Y_{max}-Y_{min}} \sum_{k_2=0}^{Y_{max}-Y_{min}} [k_1+k_2 < Y_{max}-Y_{min}-1] \min\{p_{k_1}, d_{k_2}\}(A-\max\{q_{k_1}, e_{k_2}\}+1)$$

如果忽略上式中的 $[k_1+k_2<Y_{max}-Y_{min}-1]$，我们可以从小到大枚举 $\max\{q_{k_1},e_{k_2}\}$ 的值，然后考虑这个值被哪个 q_{k_1} 或 e_{k_2} 取到，用线段树快速得到 $\min\{p_{k_1},d_{k_2}\}$ 的和来计算贡献。

对于 $k_1+k_2\ge Y_{max}-Y_{min}-1$ 的情况，显然 $\min\{p_{k_1},d_{k_2}\}(A-\max\{q_{k_1},e_{k_2}\}+1)=X_{min}(A-X_{max}+1)$，只需要算一下这种情况被统计了多少次，减掉其对应的贡献即可。

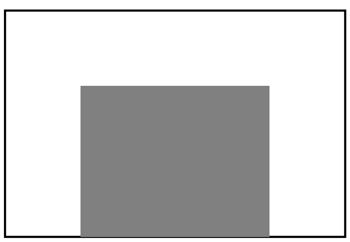
3.2.4 情况 4



这种情况下 $u_x=X_{min},v_y=Y_{max}$，只需计算 $u_y(A-v_x+1)$ 的和。

设 $b_i\ge Y_{max}-k$ 的所有 (a_i,b_i) 中，a_i 的最大值为 p_k，b_i 的最小值为 q_k；$a_i\le X_{min}+k$ 的所有 (a_i,b_i) 中，a_i 最大值为 d_k，b_i 的最小值为 e_k。之后与情况 3 类似地用线段树处理即可。

3.2.5 情况 5



这种情况下 u_x,u_y,v_y 都是确定的，我们只需计算 $A-v_x+1$ 的和。

设所有 $b_i\le Y_{min}+k$ 的 (a_i,b_i) 的 a_i 的最大值为 c_k，所有 $b_i\ge Y_{max}-k$ 的 (a_i,b_i) 的 a_i 的最大值为 d_k，所有 $a_i\le X_{min}+k$ 的 (a_i,b_i) 的 a_i 的最大值为 e_k。

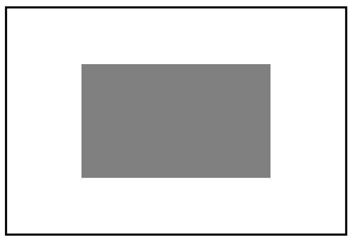
这种情况下要求的是

$$\sum_{k_1=0}^{Y_{max}-Y_{min}}\sum_{k_2=0}^{Y_{max}-Y_{min}}\sum_{k_3=0}^{X_{max}-X_{min}-1}[k_1+k_2<Y_{max}-Y_{min}-1](A-\max\{c_{k_1},d_{k_2},e_{k_3}\}+1)$$

与情况 3 类似地，我们先忽略 $[k_1+k_2<Y_{max}-Y_{min}-1]$ 算一遍答案再减去多出来的贡献。忽略之后，与之前类似地，从小到大枚举 $\max\{c_{k_1},d_{k_2},e_{k_3}\}$

的值，以及使它达到这个值的 c_{k_1} 或 d_{k_2} 或 e_{k_3}，计算贡献。之后再减去多出来的贡献即可。(这个情况中可以不用线段树)

3.2.6 情况 6



这种情况下 u_x, u_y, v_x, v_y 都是确定的，直接计算这样的矩形的数量即可。

3.3 关于实现

你需要采用合理的实现方式以避免代码过于复杂。

标算中只写出了几种本质不同的情况，对本质相同的情况只需 (根据每个情况的具体情况) 把横纵坐标交换一下，或者把横/纵坐标翻转一下，再做一遍即可。

(如果离散化了的话) 时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log n)$，标算大概要跑 500 ms。

如果你有更优美的做法，请教教出题人 /kel。